Examen

Exercice 1 : Sphère pleine chargée

Une sphère pleine de rayon $R = 1$ m contient une charge négative $Q = -50$ mC, distribuée avec une symétrie sphérique, mais non-uniformément selon la position radiale r (définie par rapport au centre de la sphère), avec une densité volumique de charge $\rho(r) = \rho_0(1 - r/R)$.

a) Est-ce que le matériau de la sphère pleine peut être conducteur ? Pourquoi ?

b) Déterminer la valeur de la constante ρ_0.

c) Calculer le champ électrique à l'intérieur et à l'extérieur de l'objet et le représenter graphiquement en fonction de r.

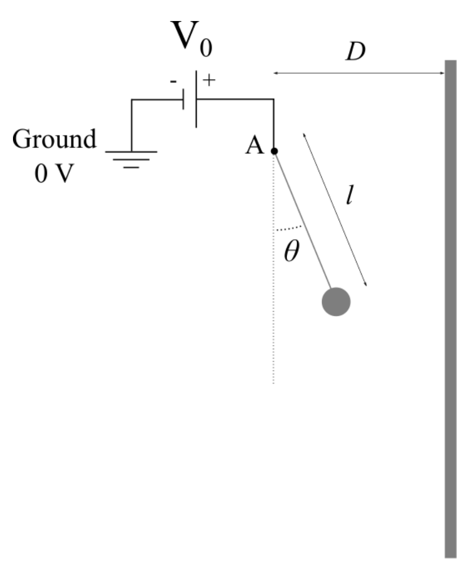
d) Déterminer la position radiale à laquelle l'amplitude du champ est maximale, et calculer la valeur de cette amplitude maximale.

e) Faire un dessin des lignes de champ à l'intérieur et à l'extérieur de l'objet.

f) Discuter qualitativement de l'effet qu'un fluide ayant une constante diélectrique de $K = 3$, présent à l'intérieur de la sphère, aurait sur le champ à l'intérieur et à l'extérieur de la sphère pleine.

Exercice 2 : Voltmètre mécanique

On souhaite mesurer la tension V_0 aux bornes d'une batterie. Pour cela on connecte la borne négative à la Terre, et la borne positive à un câble conducteur, de résistance et de capacité négligeables, au bout duquel est fixée une sphère conductrice pleine, de rayon $R = 1$ mm et masse $m = 20$ mg. La sphère peut bouger comme un pendule avec un seul degré de liberté, et on note θ l'angle entre le câble et la verticale. La longueur entre le point A de fixation du câble et le centre de la sphère est de $l = 8$ cm. À une distance $D = 5$ cm du point A on place verticalement une plaque carrée conductrice, de côté $L = 50$ cm, d'épaisseur $e = 4$ mm, et chargée avec une charge $Q = -3$ μC.



On observe une position d'équilibre et on mesure l'angle θ. On néglige les effets d'induction électrique (donc la densité de charge de chaque objet est uniforme).

a) Où se trouve la charge de la sphère et de la plaque ?

b) Calculer la charge totale portée par la sphère en fonction du potentiel V_0.

c) Déterminer le champ électrique créé par la plaque aux alentours de la sphère. Quelle est la dépendance de ce champ par rapport à la distance à la plaque ?

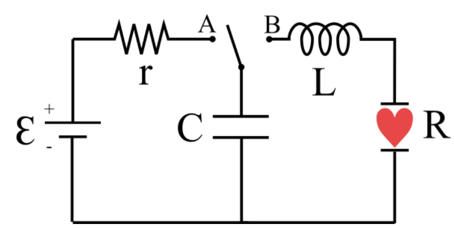
d) Calculer le potentiel V_0 en fonction de l'angle d'équilibre θ. Application numérique : $\theta = 10°$.

e) Un élève pousse la sphère jusqu'à ce que le câble conducteur soit à la verticale. Quel est le signe du travail de la force électrique sur la sphère ? Calculer sa valeur.

f) Calculer l'énergie dépensée par l'élève pour effectuer cette tâche.

Exercice 3 : Défibrillateur

Un défibrillateur a pour principale fonction de délivrer une décharge électrique dans le coeur de la victime d'un arrêt cardio-respiratoire. Lorsqu'une décharge doit être réalisée, un condensateur est chargé par un premier circuit, puis déchargé via les électrodes thoraciques collées au coeur. Les premiers défibrillateurs fonctionnaient avec une simple décharge RLC. On considère un tel défibrillateur, représenté par le circuit suivant, avec $r = 20$ kΩ, $C = 85$ μF, $L = 600$ mH. On considère une résistance du coeur de $R = 75$ Ω. La tension ε est fixée à 2500 V pendant le temps de charge.



a) On place l'interrupteur en position A. Quel est le temps caractéristique τ associé à la charge du condensateur ? Ce temps est-il raisonable pour un défibrillateur ?

b) Quelle est l'énergie qui a été dissipée dans le circuit au temps t $= \tau/2$?

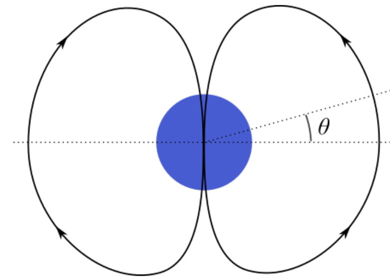
Pour être efficace la décharge doit être au moins de quelques kiloWatts, mais elle ne doit pas durer plus de quelques dizaines de millisecondes afin de dissiper rapidement la chaleur et limiter les risques de brûlures.

c) L'énergie stockée dans le condensateur, une fois chargé, est-elle suffisante pour un défibrillateur ?

d) On place l'interrupteur en position B. Établir l'équation différentielle vérifiée par le courant $i(t)$ circulant dans le coeur.

e) Le courant se décharge selon la forme $i(t) = i_0 e^{-t/\tau} \sin(\omega t)$, avec $\tau = \frac{2L}{R}$ et $\omega = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4}{LC} - \frac{R^2}{L^2}}$. Combien de périodes le signal va-t-il effectuer avant que son amplitude soit amortie de 80% ? Tracer la forme de $i(t)$.

Exercice 4 : Mesure du champ magnétique terrestre en altitude



Les lignes de champ magnétique terrestre vont du Sud géographique ($\theta = -\pi/2$) au Nord géographique ($\theta = +\pi/2$), comme illustré dans la figure. On suppose que le long d'une ligne de champ magnétique, l'amplitude du champ varie avec θ selon la forme $B(\theta) = B_0 + C\theta^2$, avec B_0 le minimum de B à l'équateur ($\theta = 0$) et C une constante.

Afin de mesurer B, on lance un satellite en orbite qui suit une ligne de champ à vitesse angulaire constante positive $\Omega = d\theta/dt = 2$ radiants/heure. Autour du satellite est déployé un cadre en cuivre ($\rho = 10^{-8}$ Ω.m, forme carrée de côté 10 m, diamètre du câble 10 cm). Un dispositif assure que la normale au cadre reste toujours orientée avec un angle $\beta = 80°$ par rapport à la direction du champ magnétique. On néglige l'auto-inductance du cadre.

a) Calculer la résistance électrique du cadre.

b) À $t = 0$, le satellite passe par l'équateur. Calculer la tension induite dans le cadre en fonction du temps pour $t > 0$.

c) On mesure un courant sur le cadre en fonction du temps $i(t) = \alpha\, t$ avec $\alpha = 50$ μA/sec. En déduire la constante C.

d) Pour obtenir B_0, on mesure le couple de force que le dispositif doit exercer pour maintenir l'orientation du cadre. Quand le satellite se trouve à une latitude $\theta = 20°$, on mesure un couple $\tau = 10$ μN. Calculer B_0.

Exercice 5 : Lévitation par laser

Un faisceau laser d'une puissance $P = 100$ W, de longueur d'onde $\lambda = 630$ nm et diamètre $d = 5$ mm est envoyé en direction verticale vers le haut depuis l'EPFL. On considère le faisceau laser comme collimaté, c'est-à-dire un ensemble de rayons parallèles sans divergence, et que la propagation dans l'air est identique à celle dans le vide. Une petite bille, ayant une surface parfaitement absorbante pour la lumière, est entièrement immergée dans le faisceau. Le matériau de la bille a une densité de 1.2 g/cm^3. Le champ électrique de l'onde du laser a l'expression suivante : $\vec{E}(x,t) = E_0 \cos(kz - \omega t)\hat{x}$, où z est la direction verticale.

a) Calculer l'expression analytique du champ $\vec{B}$ en fonction de z et t, son orientation et son amplitude.

b) Déterminer les valeurs de E_0, du nombre d'onde k et de la fréquence angulaire ω.

c) Calculer la valeur du diamètre que la bille doit avoir pour rester suspendue dans le faisceau laser grâce à la pression de radiation.

d) Si à la place d'un faisceau laser collimaté, on avait une source ponctuelle, de même puissance, serait-il possible de suspendre une bille à une altitude de 20 m par rapport à la source ? Motiver la réponse.